III– Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n); \forall n \in IN \end{cases}$

1°) a) Montrer que $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

IV– Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = G(2x) - G(x)$, où G est une primitive de f sur $[0,+\infty[$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) Montrer que F admet un maximum en $4\ln 2$.

2°) a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $0 \leq F(x) \leq 3\sqrt[3]{2}\, f(x)\left(1 - e^{-\frac{x}{3}}\right)$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

3°) On donne $F(4\ln 2) \approx 1{,}13$, tracer dans un autre repère une allure de la courbe de F.